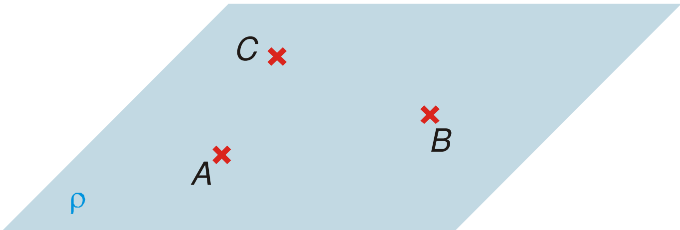
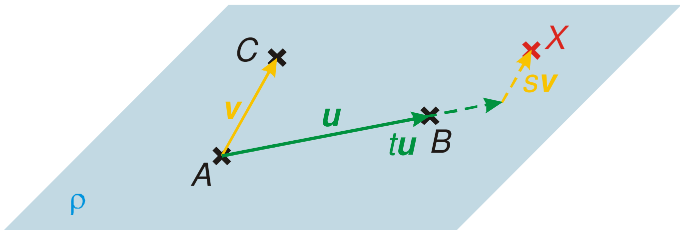
7.4.3 Parametrické vyjádření roviny

Předpoklady: 7402

Jak je dána rovina?
Například třemi body.



Jak pomocí těchto tří bodů vyjádříme všechny další body roviny ρ?
Podobně jako body na přímce: Postavíme se do bodu A a posuneme se o násobek vektoru $\boldsymbol{u} = (B - A)$ a o násobek vektoru $\boldsymbol{v} = (C - A)$.



Můžeme tedy psát: $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$

Podobné jako rovnice přímky, ale máme dva vektory. Jasné – přímka má pouze jeden rozměr, můžeme se na ní pohybovat pouze v jednom směru (proto jeden vektor), rovina má dva rozměry $\Rightarrow$ potřebujeme dva směry, dva vektory, které nejsou navzájem svými násobky.

Každý bod X roviny ABC můžeme psát ve tvaru:
$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$,
kde $\boldsymbol{u} = B - A$ a $\boldsymbol{v} = C - A$.
Každý bod X zapsaný v uvedeném tvaru je bodem roviny ABC.
Rovnice $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $t, s \in R$ se nazývá **parametrická rovnice roviny** (nebo také **parametrické vyjádření roviny**) ABC.

Př. 1: Rozepiš parametrické vyjádření roviny dané bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ do rovnic pro jednotlivé souřadnice bodů $X[x; y; z]$.

Přepisem rovnice $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$ do souřadnic získáme tři rovnice:

$x = a_1 + tu_1 + sv_1$

$y = a_2 + tu_2 + sv_2$, $t, s \in R$.

$z = a_3 + tu_3 + sv_3$

Př. 2: Najdi parametrické vyjádření roviny ABC $A[1;2;3]$, $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$. Výpočtem zjisti, zda v rovině leží body $D[3;2;1]$ a $E[-3;4;-1]$.

Určíme dva směrové vektory: $\boldsymbol{u} = B - A = (2;-2;-1)$ $\boldsymbol{v} = C - A = (-2;0;-5)$

Parametrické vyjádření roviny: $$\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s, t \in R, s \in R \end{aligned}.$$

Pokud **bod *D*** leží v rovině ABC musí vyhovovat rovnicím.

Dosadíme jeho souřadnice: $$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2t - 2s \\ 2 &= 2 - 2t \\ 1 &= 3 - t - 5s \end{aligned}$$

Tři rovnice o dvou neznámých. Z druhé rovnice vypočítáme t: $2 = 2 - 2t \Rightarrow t = 0$.
Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{aligned} &3 = 1 + 2\cdot 0 - 2s \Rightarrow s = -1 \\ &1 = 3 - 0 - 5s \Rightarrow s = \frac{2}{5} \end{aligned} \Rightarrow \text{ bod } D \text{ v rovině } ABC \text{ neleží.}$$

Pokud **bod *E*** leží v rovině ABC musí vyhovovat rovnicím.

Dosadíme jeho souřadnice: $$\begin{aligned} -3 &= 1 + 2t - 2s \\ 4 &= 2 - 2t \\ -1 &= 3 - t - 5s \end{aligned}.$$

Tři rovnice o dvou neznámých.
Z druhé rovnice vypočítáme t: $4 = 2 - 2t \Rightarrow t = -1$. Dosadíme do zbývajících:

$$\begin{aligned} &-3 = 1 + 2\cdot(-1) - 2s \Rightarrow s = 1 \\ &-1 = 3 - (-1) - 5s \Rightarrow s = 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{ bod } E \text{ v rovině } ABC \text{ leží.}$$

Pedagogická poznámka: Opět se objeví diskuse o řešení vzniklé soustavy. Někteří studenti opět dosadí za t pouze do jedné ze zbývajících dvou rovnic a zjistí tak i u bodu D, že leží v rovině ABC.

Př. 3: Jsou dány body $B[3;0;2]$, $C[-1;2;-2]$, $E[-3;4;-1]$ z předchozího příkladu (všechny leží v rovině ABC). Najdi parametrické vyjádření přímky BC. Poté vyjádři rovinu ABC pomocí vyjádření přímky BC a bodu E (rovinu je možné zadat i přímkou a bodem). Srovnej výsledek tohoto příkladu s parametrickým vyjádřením roviny ABC z předchozího příkladu.

Přímka *BC*:
Směrový vektor: $\boldsymbol{u} = C - B = (-4;2;-4)$.

Přímka BC: $X = B + t\boldsymbol{u} = [3;0;2] + t(-4;2;-4)$.

Soustava rovnic: $$\begin{aligned} x &= 3 - 4t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - 4t \end{aligned}.$$

Rovina *ABC*:

k vyjádření roviny potřebujeme dva vektory a bod. Bod a jeden vektor už máme z vyjádření přímky BC, druhý vektor musíme získat z bodu, který je v rovině, ale na přímce BC neleží $\Rightarrow$ použijeme bod E: $\boldsymbol{v} = E - B = (-6;4;-3)$

Vyjádření roviny: $\begin{aligned} x &= 3 - 4t - 6s \\ y &= 2t + 4s \\ z &= 2 - 4t - 3s, t \in R, s \in R \end{aligned}$

Srovnáme vyjádření roviny ABC z tohoto a předchozího příkladu:

nyní $\begin{aligned} x &= 3 - 4t - 6s \\ y &= 2t + 4s \\ z &= 2 - 4t - 3s, t \in R, s \in R \end{aligned}$ minule $\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s, t \in R, s \in R \end{aligned}$

$\Rightarrow$ obě vyjádření si nejsou vůbec podobná (ani směrové vektory nejsou svými násobky)

$\Rightarrow$
- Zjišťovat z parametrického vyjádření roviny totožnost nebo rovnoběžnost nebude žádný med.
- Ověřit zda bod leží v rovině je poměrně obtížné.

$\Rightarrow$ Zkusíme najít jiný způsob vyjádření roviny (zřejmě půjde o rovnici podobnou rovnici $z = 0$, která je rovnicí roviny xy).

Ve zbytku hodiny si ještě započítáme (jde fakticky o nácvik řešení soustav rovnic).

Př. 4: Najdi průsečnici roviny $ABC = \{[1 + 2t - 2s; 2 - 2t; 3 - t - 5s], t \in R, s \in R\}$ se souřadnou rovinou xz.

Rovnice souřadné roviny xz: všechny body v této rovině mají y-ovou souřadnici nulovou $\Rightarrow$ $y = 0$.

$\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{aligned} x &= 1 + 2t - 2s \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t - 5s \\ y &= 0 \end{aligned}$.

Dosadíme z poslední rovnice do druhé: $0 = 2 - 2t \Rightarrow t = 1$.

Získanou hodnotu dosadíme do zbývajících rovnic: $\begin{aligned} x &= 1 + 2 \cdot 1 - 2s = 3 - 2s \\ z &= 3 - 1 - 5s = 2 - 5s \end{aligned}$.

Soustavě rovnic vyhovuje nekonečně mnoho bodů, které vyhovují sadě rovnic:

$\begin{aligned} x &= 3 - 2s \\ y &= 0 \\ z &= 2 - 5s, s \in R \end{aligned}$ $\Rightarrow$ získali jsme parametrické vyjádření přímky (logické, očekávali jsme to).

Průseční rovin ABC a xz je přímka $p = \{[3 - 2s; 0; 2 - 5s], s \in R\}$.

Př. 5: Najdi průsečík roviny $ABC = \{[1 + 2t - 2s; 2 - 2t; 3 - t - 5s], t \in R, s \in R\}$ s přímkou $p = \{[-1 - 2t; -4 - t; -2 + t], t \in R\}$.

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ musí splňovat všechny rovnice $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic.

POZOR: vyjádření přímky p obsahuje stejně pojmenovaný parametr jako vyjádření roviny $\Rightarrow$ jedno z písmen musíme změnit.

Soustava rovnic:
$$\begin{aligned} 1+2t-2s &= -1-2r \\ 2-2t &= -4-r \\ 3-t-5s &= -2+r \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme r a dosadíme do ostatních: $r = 2t-6$.

$$\begin{aligned} 1+2t-2s &= -1-2(2t-6) \\ 3-t-5s &= -2+(2t-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+2t-2s &= -1+12-4t \\ 3-t-5s &= -2-6+2t \end{aligned}$$

$$6t-2s = 10 \qquad / : 2$$
$$3t+5s = 11$$

$$\begin{aligned} 3t-s &= 5 \\ 3t+5s &= 11 \end{aligned}$$
Rovnice odečteme: $-6s = -6 \Rightarrow s = 1$.

Dopočteme t: $3t-s = 3t-1 = 5 \Rightarrow t = 2$.
Dopočteme r: $r = 2t-6 = 2\cdot 2-6 = -2$.
Dopočteme souřadnice průsečíku:

$$x = -1-2r = -1-2\cdot(-2) = 3$$
$$y = -4-r = -4-(-2) = -2$$
$$z = -2+r = -2+(-2) = -4$$

Přímka p se s rovinou ABC protíná v bodě $P[3;-2;-4]$.

Pedagogická poznámka: Většina žáků zapomene změnit označení jednoho z parametrů a získá tak soustavu:
$$\begin{aligned} 1+2t-2s &= -1-2 \\ 2-2t &= -4-t \\ 3-t-5s &= -2+t \end{aligned}$$
. Z druhé rovnice ihned určí hodnotu $t = 6$.

Většinou pak dosadí do rovnice přímky a získají špatné souřadnice průsečíku $P[-13; -10; 4]$. Doporučím jim, aby se přesvědčili, zda tento bod leží v rovině ABC. Když zjistí, že v ní neleží, začíná hledání chyby.

Př. 6: Petáková:
strana 115/cvičení 16 a) d)
strana 115/cvičení 17 a)

Shrnutí: Parametrické vyjádření roviny je analogií parametrického vyjádření přímky. Jeho používá je však značně nemotorné.